Würfeln am Finanzmarkt

CHRISTIAN DORNER, GRAZ

Zusammenfassung: *Das Prinzip der Diversifikation bei Investitionen, kurz: „Setze nicht alles auf eine Karte!“, ist zumindest in einer intuitiven Form schon lange bekannt. Bereits Shakespeare beschrieb es im Werk „Der Kaufmann von Venedig“. Vor über sechzig Jahren lieferte Markowitz im Artikel „Portfolio Selection“ die passende (mathematische) Theorie. Dieses angesprochene Prinzip zur Risikominimierung bei Veranlagungen am Finanzmarkt gehört mittlerweile zur Allgemeinbildung. Im Folgenden wird aufgezeigt, in welcher Form der Mathematikunterricht einen Beitrag dazu liefern kann.*

1 Finanzwissen und Mathematik

Um das Finanzwissen der Bevölkerung ist es schlecht bestellt, das besagt eine Studie von Lusardi und Mitchell (2014). Anhand von drei Fragen untersuchten sie die Finanzgrundkenntnisse der Probanden.

1. Angenommen, Sie haben 100 $ auf einem Sparbuch und der Zinssatz beträgt 2 Prozent pro Jahr. Wie groß ist der Geldbetrag auf dem Sparbuch nach 5 Jahren? Antwortmöglichkeiten: mehr als 102 $, exakt 102 $, weniger als 102 $, weiß nicht, keine Antwort.
2. Stellen Sie sich vor, der Zinssatz bei Ihrem Konto beträgt 1 Prozent pro Jahr und die Inflation beträgt 2 Prozent pro Jahr. Können Sie nach einem Jahr: Antwortmöglichkeiten: mehr, genauso viel, weniger mit dem Geld auf diesem Konto kaufen, weiß nicht, keine Antwort.
3. Denken Sie, ist die folgende Aussage richtig oder falsch? „Der Kauf einer einzigen Aktie liefert in der Regel eine sicherere Rendite als die Investition in einen Aktienfond. Antwortmöglichkeiten: wahr, falsch, weiß nicht, keine Antwort. (ebd., S. 10, übersetzt)

Wer die korrekten Antworten nicht weiß, ist laut den beiden Autorinnen Finanzanalphabet. In Deutschland konnten 47 Prozent der Befragten nicht alle drei Fragen richtig beantworten, in den USA waren es 70 Prozent und in Russland sogar 96 Prozent (vgl. ebd., S. 14). Da es in den meisten Schulen kein eigenes Fach gibt, das explizit Finanzwissen vermittelt, liegt es im Sinne der Allgemeinbildung in der Verantwortung der anderen Fächer entsprechende Themen im Unterricht aufzugreifen (vgl. Daume (2009), S. 61 ff.). Mathematik liefert die Kompetenzen, um alle drei Fragen beantworten zu können. Während die ersten beiden Fragen die Prozentrechnung betreffen, betrifft die dritte Frage die Bereiche Analysis und Stochastik.

Generell benötigt man für ein umsichtiges Agieren am Finanzmarkt mathematische Fähigkeiten und Fertigkeiten. Dieser Artikel möchte eine kritisch reflektierte Haltung in Bezug auf den Finanzmarkt einnehmen, siehe dazu Abschnitt 8. Ein umfassendes (wirtschaftliches) Verständnis über Finanzwissen, z.B. Aktien (man denke an deren volkswirtschaftliche Funktion), kann der Mathematikunterricht alleine nicht leisten. In diesem Sinne bietet sich ein fächerübergreifender Unterricht mit dem/den Fach/Fächern: Politik, (Geographie und) Wirtschaftskunde und Sozialwissenschaften an.

Die Portfoliotheorie hat viele faszinierende Aussagen. Eine dieser ist eben: „Die Investition in eine einzelne Aktie ist in der Regel risikoreicher als in einen Aktienfond.“ Sie enthält auch verblüffende Teilaussagen, wie: „Wenn zwei Aktien die gleichen für die Portfoliotheorie relevanten Kennzahlen besitzen und keinerlei Abhängigkeiten zueinander aufweisen, dann reduziert eine Verteilung seines zu investierenden Vermögens auf beide Aktien das betrachtete Risiko im Vergleich zur Investition in nur eine der beiden Aktien.“ oder „Wenn eine Aktie nach den für die Portfoliotheorie wichtigen Kennzahlen klar schlechter ist als eine zu ihr unabhängige andere, dann zahlt sich trotzdem eine Aufteilung seines zu investierenden Vermögens auf beide Aktien im Sinne einer Risikominimierung aus.“

Dorner (2017) zeigt in seiner Dissertation auf, wie Schüler/innen durch ein Würfelglücksspiel an die Portfoliotheorie herangeführt werden können. Diese Idee wird hier aufgegriffen und erweitert. Im Artikel werden die drei obigen Aussagen in vereinfachter Form anhand eines solchen Glücksspiels aufgezeigt und anschließend auf den Finanzmarkt übertragen. Abschließend wird aber auch die Limitation der Portfoliotheorie am Würfelspiel aufgezeigt.

2 Ein seltsam anmutendes Spiel

Die Spielregeln für ein Würfelglücksspiel zur Behandlung der Aussage „Wenn zwei Aktien die gleichen für die Portfoliotheorie relevanten Kennzahlen besitzen und keinerlei Abhängigkeiten zueinander aufweisen, dann reduziert eine Verteilung seines zu investierenden Vermögens auf beide Aktien das betrachtete Risiko im Vergleich zur Investition in nur eine der beiden Aktien.“ lauten wie folgt:

> *Version 1*: Es gibt einen fairen roten und einen fairen blauen Würfel. Man gibt sich selbst einen Einsatz für dieses Spiel vor und bestimmt einen Teil des Einsatzes, der auf den roten Würfel gesetzt wird. Der restliche Betrag des Einsatzes wird auf den blauen Würfel gesetzt. Es werden beide Würfel geworfen. Wenn der rote Würfel die Augenzahl 1, 2 oder 3 anzeigt, dann bekommt man das Dreifache des auf den roten Würfel gesetzten Betrags, im anderen Fall, also wenn der rote Würfel die Augenzahl 4, 5 oder 6 anzeigt, dann verliert man den gesetzten Betrag. Für den blauen Würfel gilt genau dasselbe. Wenn der blaue Würfel die Augenzahl 1, 2, oder 3 anzeigt, dann bekommt man das Dreifache des auf den blauen Würfel gesetzten Betrags, im anderen Fall verliert man diesen Betrag. Wie soll der Einsatz auf die Würfel aufgeteilt werden?

Spieler/innen interessieren sich vermutlich für jene Aufteilung, bei der man den größten Gewinn zu erwarten hat oder die das Risiko für einen Verlust minimiert. Wir formulieren dazu passende Fragestellungen, die in ähnlicher Form auch bei der Portfoliotheorie eine Rolle spielen:

1. Wie groß ist der Gewinnerwartungswert des Spiels? Ist der Gewinnerwartungswert abhängig von der Aufteilung?
2. Bei welcher Aufteilung seines Einsatzes erhält man das geringste Risiko?

Aus Gründen der Einfachheit setzen wir bei den folgenden Betrachtungen in diesem Spiel insgesamt einen Euro. Von diesem Euro wetten wir $a \cdot 1$ auf den roten Würfel und $(1-a) \cdot 1$ auf den blauen Würfel, dabei ist $0 \leq a \leq 1$. Sei X jene Zufallsvariable, die den Gewinn bei diesem Spiel beschreibt.

Das Glücksspiel kann als zweistufiges Zufallsexperiment aufgefasst werden. Für die Berechnung des Gewinnerwartungswertes eignet sich die Betrachtung eines passenden Baumdiagramms (Abb. 1).

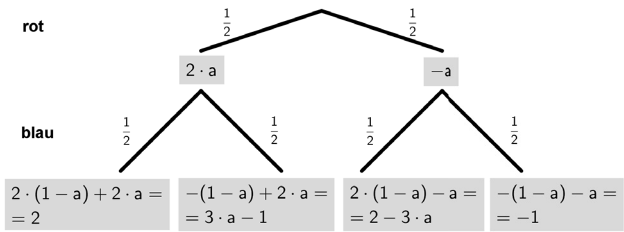

Abb. 1. Baumdiagramm für das Glücksspiel V 1

Wenn der rote Würfel 1, 2 oder 3 anzeigt, dann bekommen wir das Dreifache des Einsatzes $3a$ ausbezahlt, wir gewinnen also $3a - a = 2a$. Dementsprechend tragen wir jeweils den Gewinn im Baumdiagramm ein.

1) Der Gewinnerwartungswert wird folgendermaßen berechnet:

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot (3a-1) + \frac{1}{4} \cdot (2-3a) + \frac{1}{4} \cdot (-1) = \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot [(3a-1)+(2-3a)] = \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Der berechnete Erwartungswert der Zufallsvariable X ist unabhängig vom gesetzten Anteil a auf den roten Würfel. Er beträgt konstant $\frac{1}{2}$ Euro. Wenn man also nur den erwarteten Gewinn als Entscheidungskriterium für die Aufteilung heranzieht, dann kann man alles auf einen Würfel setzen.

2) Was ist ein geeignetes Maß für das Risiko? Eine Möglichkeit liegt in der Betrachtung von Schwankungen um den zu erwartenden Gewinn. Wenn die Schwankung sehr groß ist, dann kann es sein, dass das tatsächliche Ergebnis relativ weit vom Gewinnerwartungswert entfernt ist. Das führt im ungünstigen Fall zu einem (großen) Verlust. Aus diesen Überlegungen heraus erscheint es sinnvoll, die Standardabweichung als Risikomaß heranzuziehen. Nach der Antwort der ersten Frage kann man durchaus vermuten, dass die Standardabweichung ebenfalls unabhängig von a ist. Da die Wurzelfunktion streng

monoton ist, reicht es, die Varianz zu betrachten:

$$
\begin{aligned}
V(X) =& \frac{1}{4}\cdot\left(2-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\cdot\left(3a-1-\frac{1}{2}\right)^2+\\
&+\frac{1}{4}\cdot\left(2-3a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\cdot\left(-1-\frac{1}{2}\right)^2=\\
=&\frac{9}{4}\cdot(2a^2-2a+1)=\frac{9}{2}\cdot\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{8}
\end{aligned}
$$

Man sieht, die Varianz bzw. die Standardabweichung ist jedoch abhängig von a. Erstere lässt sich als quadratische Funktion in a auffassen, bei der man das Minimum einfach findet, $a=\frac{1}{2}$. Das bedeutet, die geringste Abweichung vom Gewinnerwartungswert kann man bei einer gleichmäßigen Aufteilung seines Spieleinsatzes erwarten. Die Standardabweichung beträgt dann $\sqrt{\frac{9}{8}}\approx 1{,}06$.

Unabhängig von den vorigen Betrachtungen ist die Aussage: Wenn $a\in\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ ist, dann gewinnt man auf lange Sicht in drei von vier Fällen! Dazu muss man nur die zwei mittleren Ausfälle im Baumdiagramm (Abb. 1) betrachten: $3a-1>0$ bzw. $2-3a>0$. Auch in diesem Sinne zahlt sich eine Aufteilung seines Einsatzes auf beide Würfel aus.

3 Das Spiel mit dem klar schlechteren Würfel

Die Spielregeln werden nun ein wenig verändert, um die Aussage „Wenn eine Aktie nach den für die Portfoliotheorie wichtigen Kennzahlen klar schlechter ist als eine zu ihr unabhängige andere, dann zahlt sich trotzdem eine Aufteilung seines zu investierenden Vermögens auf beide Aktien im Sinne einer Risikominimierung aus.“ in einfacher Form betrachten zu können:

> *Version 2*: Wenn der rote Würfel die Augenzahl 1, 2, 3, 4 oder 5 anzeigt, dann bekommt man das Dreifache des gesetzten Betrags, im anderen Fall, also wenn der rote Würfel die Augenzahl 6 anzeigt, dann verliert man seinen Einsatz. Wenn der blaue Würfel die Augenzahl 1, 2, oder 3 anzeigt, dann wird das Doppelte ausbezahlt, im anderen Fall verliert man zweimal den gesetzten Betrag (also den gesetzten Betrag und nochmals diesen Betrag). Wie soll der Einsatz auf die Würfel aufgeteilt werden?

Bevor wir zur Beantwortung der obigen Fragen übergehen, betrachten wir wieder das zugehörige Baumdiagramm (Abb. 2).

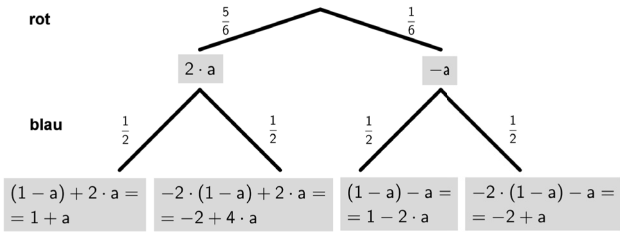

Abb. 2. Baumdiagramm für das Glücksspiel V 2

1) Der Gewinnerwartungswert ergibt folgenden Wert:

$$
\begin{aligned}
E(X) =& \frac{5}{12}\cdot(1+a)+\frac{5}{12}\cdot(-2+4a)+\\
&+\frac{1}{12}\cdot(1-2a)+\frac{1}{12}\cdot(-2+a)=\\
=&2\cdot a-\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Der Erwartungswertes von X weist nun eine Abhängigkeit von a auf. Analytisch betrachtet, erkennt man sofort, dass der Erwartungswert möglichst groß ist, wenn a möglichst groß ist. Bei $a=1$ erhält man den maximalen Erwartungswert. Unsere Intuition bestätigt das Ergebnis, der erste Würfel ist klar besser als der zweite Würfel, eine Aufteilung des zu setzenden Betrags hat demnach keinen Sinn.

2) Die Aufteilung für die minimale Standardabweichung bestimmt man wiederum am einfachsten über die Varianz. Sei $\mu := E(X) = 2a-\frac{1}{2}$.

$$
\begin{aligned}
V(X) =& \frac{5}{12}\cdot(1+a-\mu)^2+\frac{5}{12}\cdot(-2+4a-\mu)^2+\\
&+\frac{1}{12}\cdot(1-2a-\mu)^2+\frac{1}{12}\cdot(-2+a-\mu)^2=\\
=&\frac{7a^2}{2}-\frac{9a}{2}+\frac{9}{4}=\frac{7}{2}\cdot\left(a-\frac{9}{14}\right)^2+\frac{45}{56}
\end{aligned}
$$

Die Varianz von X hängt quadratisch von a ab. Das Minimum der quadratischen Funktion liegt bei $a=\frac{9}{14}\approx 0{,}64$ und die zugehörige Standardabweichung bei $\frac{3\cdot\sqrt{70}}{28}\approx 0{,}896$. Dieses Ergebnis verblüfft, obwohl der bessere Würfel klar der rote Würfel ist, hat es aufgrund der Risikominimierung Sinn, ungefähr ein Drittel des Einsatzes auf den blauen Würfel zu setzen. Das rührt daher, da man auf lange Sicht im Schnitt in einem von sechs Fällen mit dem roten Würfel verliert. In so einem schlechten Fall hat man bei dieser Aufteilung auf beide Würfel dann noch die Chance, mit dem blauen Würfel den Verlust zu verkleinern. Im Gegenzug büßt man Gewinn beim roten Würfel ein, insgesamt ist die Standardabweichung daher klein.

Einen guten Überblick über das Verhalten der beiden Kennzahlen zeigt ein Risiko-Erwartungswert-Diagramm. Für jeden möglichen Anteil a platziert man einen Punkt im Diagramm, dessen 1. Koordinate das Risiko (die Standardabweichung) und dessen 2. Koordinate den Erwartungsgewinn angibt. In Abb. 3 wird für jedes $a \in [0;1]$ der Punkt $\left(\sqrt{\frac{7a^2}{2} - \frac{9a}{2} + \frac{9}{4}}, 2a - \frac{1}{2}\right)$ eingetragen.

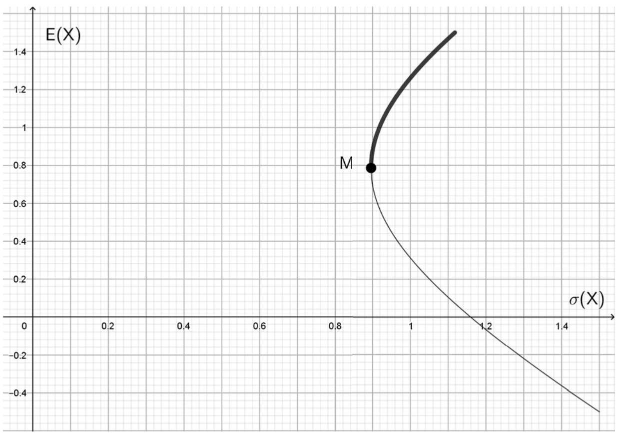

Abb. 3. Risiko-Gewinnerwartungswert-Diagr. für V2

Der Punkt M repräsentiert jene Aufteilung auf die beiden Würfel mit minimalem Risiko. Die Kombinationen, die einen Punkt auf dem dicken Ast oder M liefern, würde ein/e rationale/r Spieler/in wählen. Alle anderen Kombinationen liefern jeweils einen Punkt, für den bei gleichem Risiko eine Kombination existiert, die einen höheren Gewinnerwartungswert hat (siehe dicker Ast), oder der einen sehr kleinen bis negativen Gewinnerwartungswert aufweist. Bei Version 1 des Spiels sieht man in einem Risiko-Gewinnerwartungswert-Diagramm eine horizontale Strecke, da der Erwartungswert hier konstant ist.

Auch bei Version 2 könnte man wieder versuchen a so zu wählen, dass bei möglichst vielen Wegen im Baumdiagramm (Abb. 2) ein Gewinn herauskommt. Aber die Forderungen der beiden mittleren Wege lauten $a > \frac{1}{2}$ und $a < \frac{1}{2}$, welche nicht zu vereinen sind. Die Wege sind nicht gleichwahrscheinlich, aus diesem Grund erscheint ein Wert von a als gut, wenn bei den beiden linken Wegen ein Gewinn herauskommt, das ist bei $a > \frac{1}{2}$ der Fall.

4 Würfeln mit einer Abhängigkeitsstruktur

In der folgenden Version werden die Regeln so verändert, dass die Auszahlungen der Würfeln eine Abhängigkeitsstruktur besitzen. Dabei handelt es sich um eine Simplifizierung auf zwei Würfeln (bzw. auf zwei Aktien) der allgemeinen oben angeführten Aussage, für die genaue Ausführung des Zusammenhangs mit dem Finanzmarkt siehe Abschnitt 6.

> *Version 3*: Wenn der rote Würfel die Augenzahl 1, 2, 3 oder 4 anzeigt, dann bekommt man das Dreifache des gesetzten Betrags, im anderen Fall, also wenn der rote Würfel die Augenzahl 5 oder 6 anzeigt, dann verliert man den gesetzten Betrag. Die Auszahlung des blauen Würfels hängt vom Würfelergebnis des roten Würfels ab. Wenn der rote Würfel 1, 2, 3 oder 4 anzeigt, dann erhält man beim blauen Würfel bei 1, 2, 3, 4 oder 5 das Dreifache des gesetzten Betrags und bei 6 verliert man den gesetzten Betrag. Im anderen Fall wenn der rote Würfel 5 oder 6 anzeigt, dann erhält man beim blauen Würfel nur bei 1 das Dreifache des gesetzten Betrags. Bei 2, 3, 4, 5 oder 6 verliert man den gesetzten Betrag. Wie soll der Einsatz auf die Würfel aufgeteilt werden?

A priori lässt sich bei dieser Version gar nicht sagen, welcher Würfel besser ist. Welche Aufteilung soll gewählt werden? Ein Blick auf das Baumdiagramm hilft für die Berechnungen (Abb. 4).

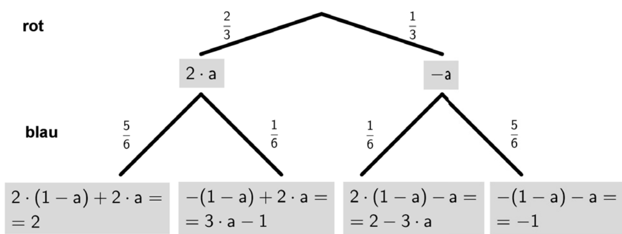

Abb. 4. Baumdiagramm für das Glücksspiel V 3

Die Möglichkeiten des Auszahlungsfaktors sind wie bei Version 1, nur die Gewichtung der Pfade hat sich verändert. Wie reagieren die beiden Werte darauf?

1) Wir berechnen den Gewinnerwartungswert:

$$\begin{aligned} E(X) =& \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} \cdot 2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot (3a-1) + \\ &+ \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot (2-3a) + \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6} \cdot (-1) = \\ =& \frac{a+5}{6} \end{aligned}$$

Im Gegensatz zum Gewinnerwartungswert der Version 1 hängt der Erwartungswert hier vom Anteil a linear ab. Ein großer Wert für a hat einen großen Erwartungswert zur Folge. Den größten Gewinn erwartet man, wenn man alles auf den ersten Würfel setzt.

2) Bei der Risikominimierung zeigt sich ein anderes Bild. Eine nahezu gerechte Aufteilung mit leichtem Überhang zum ersten Würfel erweist sich als Risikominimalaufteilung. Sei $\mu = \frac{a+5}{6}$.

$$\begin{aligned} V(X) =& \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} \cdot (2-\mu)^2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot (3a-1-\mu)^2 + \\ &+ \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot (2-3a-\mu)^2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6} \cdot (-1-\mu)^2 = \\ =& \frac{53a^2}{36} - \frac{29a}{18} + \frac{77}{36} = \frac{53}{36} \cdot \left(a - \frac{29}{53}\right)^2 + \frac{90}{53} \end{aligned}$$

Erneut hängt die Varianz quadratisch von a ab. Die minimale Varianz bzw. Standardabweichung liegt bei $a = \frac{29}{53} \approx 0.55$. Letztere beträgt $\frac{3\cdot\sqrt{530}}{53} \approx 1,3$.

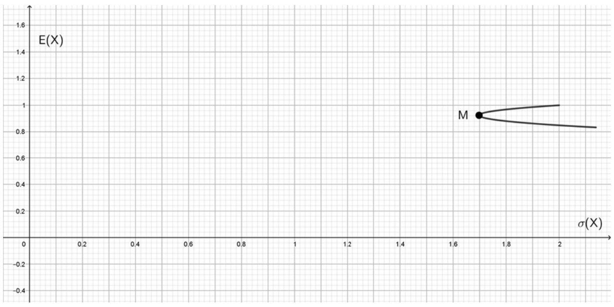

Abb. 5. Risiko-Gewinnerwartungswert-Diagr. für V3

Das Risiko-Gewinnerwartungswert-Diagramm (Abb. 5) weist bei dieser Version ganz andere Charakteristika auf als bei der vorigen Version. Die Skalierung der Achsen wurde im Vergleich zur Abb. 3 beibehalten, allerdings wurde das Bild verkleinert. Die Kurve ist schmäler als bei Version 2, die beiden Würfel aus der Version 3 sind sich vom Auszahlungsfaktor und der dazugehörigen Wahrscheinlichkeitsgewichtung sehr ähnlich. Diese Aussage kann hier nur aufgrund des Diagramms getätigt werden, für die tatsächlichen Wahrscheinlichkeiten siehe Abschnitt 5. Im extremen Fall wie bei Version 1 erhält man nur noch eine Strecke. Der Risikominimierungseffekt durch Aufteilung lässt sich bei allen drei Versionen beobachten.

Bei der Betrachtung der Pfade erhält man erneut das gleiche Ergebnis $a \in \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$ wie bei Version 1. Eine Aufteilung zahlt sich also demnach wieder aus.

5 Eine andere Berechnungsweise

Mit dieser etwas anderen Berechnungsweise machen wir einen Schritt in Richtung Portfoliooptimierung. Ziel des Abschnitts ist die Verallgemeinerbarkeit. Die folgende Betrachtung lässt sich genauso bei der Risikominimierung von Portfolios (mit Aktien, deren Renditen als normalverteilt angenommen werden,) umsetzen.

Im Gegensatz zu den vorangegangenen Berechnungen betrachten wir nun die beiden Würfel getrennt, dafür müssen zwei Zufallsvariablen eingeführt werden. Die Zufallsvariable X_1 gibt den Gewinnauszahlungsfaktor des ersten Würfels an. Wenn X_1 einen Wert von 2 annimmt, dann bedeutet es, man gewinnt das Doppelte des Einsatzes, bei einem Wert von 3, ist es eine Verdreifachung usw. Analog sei X_2 der Gewinnauszahlungsfaktor des zweiten Würfels. Auch bei dieser Betrachtung nehmen wir an, dass wir insgesamt 1 Euro setzen, davon $a \cdot 1$ auf den roten Würfel und $(1-a)\cdot 1$ auf den blauen Würfel. Die Zufallsvariable $X = a \cdot X_1 + (1-a) \cdot X_2$ beschreibt den Gesamtgewinn des Spiels. Der Erwartungswert von X berechnet sich aufgrund der Linearität des Erwartungswertes so

$$E(X) = a \cdot E(X_1) + (1-a) \cdot E(X_2) \tag{1}$$

und für die Varianz ergibt sich bei zwei Zufallsvariablen X_1 und X_2 die folgende Darstellung:

$$\begin{aligned} V(X) =& V(a \cdot X_1 + (1-a) \cdot X_2) = \\ =& V(a \cdot X_1) + V((1-a) \cdot X_2) + \\ &+ 2 \cdot Cov(a \cdot X_1, (1-a) \cdot X_2) = \\ =& a^2 \cdot V(X_1) + (1-a)^2 \cdot V(X_2) + \\ &+ 2 \cdot a \cdot (1-a) \cdot Cov(X_1, X_2) \end{aligned} \tag{2}$$

Die Standardabweichung hat die Form $\sigma(X) = \sqrt{a^2 \cdot V(X_1) + (1-a)^2 \cdot V(X_2) + 2 \cdot a \cdot (1-a) \cdot Cov(X_1, X_2)}$. Bei Unabhängigkeit der beiden Zufallsvariablen ist die Kovarianz 0, die Terme vereinfachen sich. Mit Hilfe dieser Resultate können die Ergebnisse der obigen Fragestellungen durch Einsetzen repliziert werden.

Wir richten den Fokus auf die Version 1. Beim roten Würfel erhält man mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2}$ das Doppelte und verliert mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2}$ den Einsatz. Der Erwartungswert für den Auszahlungsfaktor des roten Würfels $E(X_1)$ ergibt:

$$E(X_1) = 2 \cdot \frac{1}{2} + (-1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Da sich diesbezüglich der rote und der blaue Würfel nicht unterscheiden, erhält man auch $E(X_2) = \frac{1}{2}$. Für die Varianz $V(X)$ bestimmt man zuerst $V(X_1)$:

$$V(X_1) = \left(2 - \frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + \left(-1 - \frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{4}$$

Für die Varianz $V(X_2)$ ergibt sich wiederum $\frac{9}{4}$. Die Varianz des Gesamtgewinns des Spiels berechnet sich dann folgendermaßen:

$$\begin{aligned}V(X) =& a^2 \cdot V(X_1) + (1-a)^2 \cdot V(X_2) = \\ =& a^2 \cdot \frac{9}{4} + (1-a)^2 \cdot \frac{9}{4} = \\ =& \frac{9}{4} \cdot \left(2a^2 - 2a + 1\right)\end{aligned}$$

Auch so erreicht man eine Formel der Varianz. Der Optimierungsvorgang bleibt gleich.

Interessanter ist das Vorgehen bei Version 3. Seien X_1, X_2 und X für diese Betrachtung analog definiert wie zuvor. Zunächst bestimmen wir die Erwartungswerte der Gewinnauszahlungsfaktoren. Hier sind die beiden Zufallsvariablen X_1 und X_2 abhängig. Für X_1 ist das auch sofort möglich.

$$E(X_1) = 2 \cdot \frac{2}{3} + (-1) \cdot \frac{1}{3} = 1$$

Beim blauen Würfel weiß man die Wahrscheinlichkeit für einen Auszahlungsfaktor von 2 bzw. -1 nicht sofort. Diese kann mit Hilfe des Satzes der *totalen Wahrscheinlichkeit* bestimmt werden.

$$P(X_2 = 2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{11}{18}$$

Die Wahrscheinlichkeit für einen Auszahlungsfaktor von -1 beträgt daher $\frac{7}{18}$. Jetzt ist die in Abschnitt 4 angesprochene Ähnlichkeit der beiden Würfel erkennbar und der Erwartungswert von X_2 berechenbar.

$$E(X_2) = 2 \cdot \frac{11}{18} + (-1) \cdot \frac{7}{18} = \frac{5}{6}$$

Der Gewinnerwartungswert beläuft sich auf:

$$E(X) = a \cdot 1 + (1-a) \cdot \frac{5}{6} = \frac{a+5}{6}$$

Um die Standardabweichung von X zu ermitteln, muss neben den Varianzen auch die Kovarianz von X_1 und X_2 bestimmt werden. Man berechnet für Letztere:

$$\begin{aligned}Cov(X_1, X_2) =& E((X_1 - E(X_1)) \cdot (X_2 - E(X_2))) = \\ =& \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} \cdot (2-1) \cdot \left(2 - \frac{5}{6}\right) + \\ &+ \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot (2-1) \cdot \left(-1 - \frac{5}{6}\right) + \\ &+ \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot (-1-1) \cdot \left(2 - \frac{5}{6}\right) + \\ &+ \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6} \cdot (-1-1) \cdot \left(-1 - \frac{5}{6}\right) = \\ =& \frac{4}{3}\end{aligned}$$

Die Varianzen betragen $V(X_1) = 2$ und $V(X_2) = \frac{77}{36}$. Die Varianz von X ist also:

$$\begin{aligned}V(X) =& a^2 \cdot 2 + (1-a)^2 \cdot \frac{77}{36} + 2 \cdot a \cdot (1-a) \cdot \frac{4}{3} = \\ =& \frac{53a^2}{36} - \frac{29a}{18} + \frac{77}{36}\end{aligned}$$

Das minimale Risiko bestimmt man wie zuvor.

6 Der Finanzmarkt als Würfelspiel

Wer am Finanzmarkt einen Betrag in Aktien investieren möchte, den interessieren unter anderem zwei Kennzahlen. Wie hoch ist die Rendite des Aktienkurses? Wie groß ist das Risiko der Investition?

Was kann man sich unter einer Rendite vorstellen? Tabelle 1 zeigt die Schlusswerte der Lufthansa-Aktie an der Börse in Frankfurt. Die Werte wurden von der Website `www.finanzen.at` unter „historische Kurse" entnommen.

Datum	Kurs in Euro
27.10.2017	27,14
26.10.2017	27,60
25.10.2017	27,12
24.10.2017	26,31
23.10.2017	25,94

Tab. 1 Kurswerte der Lufthansa-Aktie 23.10.2017-27.10.2017

Anleger/innen interessieren sich mehr für die relativen Kursänderungen als für die absoluten Kurswerte. Die relative Kursänderung vom 23.10. zum 27.10. oder auch Rendite in der betrachteten Woche betrug

$$\frac{27,14 - 25,94}{25,94} \approx 4,6\%$$

So kann für jeden investierten Betrag sofort der Gewinn bzw. Verlust berechnet werden.

Das „Journal of Finance" veröffentlichte im Jahr 1952 einen Artikel von Harry Markowitz über Portfoliooptimierung. Der Autor nimmt an, dass Investoren/innen ihr Augenmerk nicht nur auf die zu erwartende Rendite eines Wertpapiers richten, sondern auch das damit einhergehende Risiko berücksichtigen (vgl. Adelmeyer und Warmuth (2009), S. 83 f.). Als Maß für das Risiko nimmt Markowitz die Standardabweichung der Rendite und lieferte so erstmals einen Nachweis der Risikominimierung durch Diversifikation, darunter versteht man das Verteilen seines

Investitionsvermögens auf mehrere Anlagen. Markowitz minimiert in seinem ersten Paper tatsächlich die Varianz, sagt aber später selber, dass die aussagekräftigere Kennzahl die Standardabweichung ist. Das hat aber keinen Einfluss auf die Ergebnisse (vgl. Markowitz (1999), S. 6).

Markowitz geht von einem risikoaversen, sich rational verhaltenden Menschen aus, der bei der Investition am Finanzmarkt nur Chance (erwartete Rendite) und Risiko (Standardabweichung der Rendite) in Betracht zieht. Diese Fokussierung auf Erwartungswert und Varianz bzw. Standardabweichung hat vor allem bei zumindest in einem gewissen Intervall normalverteilten Renditen Sinn. Markowitz (1952) führt Zufallsvariablen R_i mit Erwartungswert μ_i, Kovarianz σ_{ij} zur Rendite R_j und Varianz σ_{ii} für die Renditen ein. Eine Verteilung von R_i wird nicht angegeben (vgl. ebd., S. 81).

Wir betrachten nun zwei Aktien A und B, deren zu erwartende Monatsrenditen jeweils 4% betragen, während das zu erwartende Risiko in diesem Zeitraum jeweils 7% beträgt. Am Finanzmarkt gibt es Aktien, bei denen es sehr wahrscheinlich ist, dass sie auf bestimmte Ereignisse ähnlich reagieren. Sie steigen beide bei gewissen Vorkommnissen und fallen beide bei anderen. Andere Aktien wiederum verhalten sich mit hoher Wahrscheinlichkeit bei bestimmten Ereignissen konträr. In anderen Fällen kann man keine Abhängigkeiten beobachten. In der Finanzwelt spricht man in diesem Zusammenhang von der Korrelation zweier Aktien. Für die Aktien A und B nehmen wir an, es liegen keine Abhängigkeiten vor. Wie soll das zu investierende Vermögen auf beide Aktien aufgeteilt werden, damit die Standardabweichung des Portfolios (darunter versteht man einen Sammelbegriff aller Anlagen, die ein/e Investor/in hält) möglichst klein wird?

Die Parallelen zum Würfelspiel sind offensichtlich. Ein Würfel stellt ein Wertpapier dar. Der Gewinnauszahlungsfaktor eines Würfels entspricht der Rendite eines Wertpapiers. Die Art der Korrelation wird durch die Kovarianz ausgedrückt. Um die Analogie zum Spiel beizubehalten, betrachten wir nur Portfolios mit zwei Aktien. Sowohl das Würfelspiel als auch die Portfoliotheorie lassen sich auf n Würfel bzw. Wertpapiere erweitern. Wenn man beispielsweise normalverteilte Renditen betrachtet, dann hat man stetige Zufallsvariablen und kann den Erwartungswert bzw. die Standardabweichung nicht über einfache Baumdiagramme bestimmen. Die Vorgehensweise wie in Abschnitt 5 bleibt hier aber gültig.

Wir nehmen erneut an, dass wir insgesamt nur 1 Euro investieren. Dabei investieren wir $a \cdot 1$ Euro in die Aktie A und $(1-a) \cdot 1$ Euro in die Aktie B, wiederum gilt $0 \leq a \leq 1$. Die Rendite der Aktie A bzw. B bezeichnen wir mit X_1 bzw. X_2 und die Rendite des Portfolios (oder den Gesamtgewinn des Portfolios) mit $X = a \cdot X_1 + (1-a) \cdot X_2$. Die erwartete Rendite des Portfolios beträgt nach Formel (1).

$$\begin{aligned} E(X) =& a \cdot E(X_1) + (1-a) \cdot E(X_2) = \\ =& a \cdot 0{,}04 + (1-a) \cdot 0{,}04 = 0{,}04 \end{aligned}$$

Der Erwartungswert des Portfolios ist unabhängig von a wie bei den gleich guten Würfeln des Glücksspiels in der Version 1. Unter diesem Gesichtspunkt hat eine Diversifikation keinen Sinn. Die Varianz des Portfolios bestimmt man mit der Formel (2).

$$\begin{aligned} V(X) =& a^2 \cdot V(X_1) + (1-a)^2 \cdot V(X_2) + 0 = \\ =& a^2 \cdot 0{,}07^2 + (1-a)^2 \cdot 0{,}07^2 = \\ =& 0{,}0098a^2 - 0{,}0098a + 0{,}0049 \end{aligned}$$

Die Varianz der Rendite des Portfolios hängt quadratisch von a ab. Die minimale Varianz erhält man bei $a = \frac{1}{2}$. Diversifikation, eine Aufteilung zahlt sich im Sinne der Risikominimierung aus. Einen anderen Zugang zur Herleitung der Portfoliovarianz findet man bei Adelmeyer und Warmuth (2009) auf Seite 88.

Es lässt sich erkennen, dass man hier von Aktien und Renditen spricht, aber es besteht im Wesentlichen kein Unterschied zu den Würfelspielen. Für die anderen Würfelspiele lassen sich ebenfalls Aktien mit den passenden Kennzahlen (er)finden.

Für die Aktien Facebook und Lufthansa ermittelt man am einfachsten aus historischen Kurswerten folgende Kennzahlen auf monatlicher Basis für das Jahr 2016, siehe Tabelle 2:

	Facebook	Lufthansa
μ	3,75%	0,67%
σ	7%	8,3%

Tab. 2 Kennzahlen der beiden Aktien

Die Kovarianz beläuft sich aufgrund der historischen Daten auf 0,001775. Die Lufthansa-Aktie ist nach diesen Kennzahlen als die klar schlechtere Aktie zu sehen. Die Varianz des Portfolios hat die Form:
$V(X) = 0{,}07^2 \cdot a^2 + 0{,}083^2 \cdot (1-a)^2 + 2 \cdot a \cdot (1-a) \cdot 0{,}001775$
Die minimale Varianz bzw. Standardabweichung erhält man bei der Aufteilung $a \approx 0{,}62$. Die Minimierung der Varianz empfiehlt, ca. 40% auf die schlechtere Aktie zu setzen. Das ist auf den ersten Blick verblüffend wie bei dem Spiel mit dem

klar schlechteren Würfel aus Abschnitt 3. Der Grund dafür liegt in der Tatsache, dass die Portfoliovarianz keine lineare Funktion der Varianzen der im Portfolio enthalten Wertpapiere ist (siehe auch Abschnitt 7). Es ist also im Allgemeinen sinnvoll die Investitionen in ein Portfolio zu diversifizieren.

In der Portfoliotheorie ist es üblich alle möglichen Kombinationen der beiden Aktien in einem Risiko-Rendite-Diagramm einzuzeichnen analog zu dem Risiko-Gewinnerwartungswert-Diagramm bei den Würfelspielen. In diesem Fall erhält man Abb. 6:

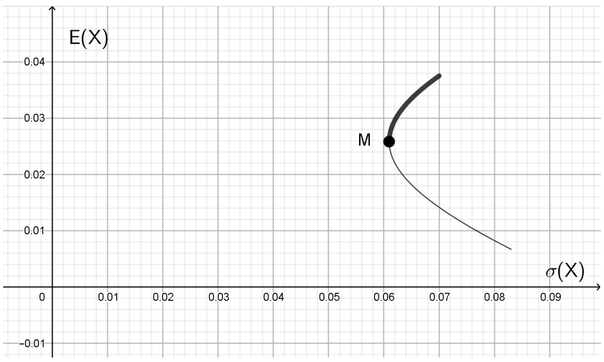

Abb. 6 Risiko-Rendite-Diagramm

Der Punkt M repräsentiert jene Aufteilung auf beide Aktien, die das kleinste Risiko aufweist, welches geringer ist als die Risiken der einzelnen Aktien. Die erwartete Rendite des Portfolios liegt zwischen den erwarteten Renditen der einzelnen Aktien. Alle Punkte am dicken Ast und M stehen für rationale Aufteilungen auf beide Aktien wie bei den Würfelspielen.

7 Limitationen des Optimierungsansatzes

Die Minimierung des Risikos mit Hilfe der Minimierung der Standardabweichung hat ihre Grenzen. Betrachten wir dazu das folgende Beispiel:

> *Version 4*: Wenn der rote Würfel die Augenzahl 1, 2 oder 3 anzeigt, dann bekommt man das Zwanzigfache des gesetzten Betrags, im anderen Fall, also wenn der rote Würfel die Augenzahl 4, 5 oder 6 anzeigt, dann bekommt man das Zehnfache des gesetzten Betrags ausbezahlt. Wenn der blaue Würfel die Augenzahl 1, 2, oder 3 anzeigt, dann gewinnt man das Doppelte des gesetzten Betrags, im anderen Fall verliert man das Doppelte des gesetzten Betrags.

Kein rational denkender Mensch würde hier auch nur einen Cent auf den blauen Würfel setzen sondern alles auf den roten Würfel. Die Standardabweichung des blauen Würfels ist in diesem Fall kleiner, der bisher verwendete Optimierungsvorgang schlägt vor, ca. 14% des Einsatzes auf den roten Würfel zu setzen! Das Minimierungsverfahren betrachtet eben nur die Standardabweichung. Die Auszahlungsbeträge spielen dabei keine Rolle. Bei Version 4 beträgt die Standardabweichung des roten Würfels $\sigma(X_1) = 5$, beim blauen Würfel ist $\sigma(X_2) = 2$, daher rühren die 14%. Das Verfahren darf eben nicht ohne nachzudenken angewandt werden.

8 Didaktische Bemerkungen

Der Zugang zur Portfoliooptimierung über das vorgestellte Würfelglücksspiel ist diskutabel. Aktien werden mit Würfeln assoziiert. Können Aktienkurse als zufällig angesehen werden? Ja, eine sichere Vorhersage ist ein Ding der Unmöglichkeit. Das Partizipieren am Finanzmarkt kann man als „Glücksspiel für Erwachsene“ ansehen. Dorner (2017) befragte im Rahmen seiner Dissertation Finanzmathematiker/innen zu „zentralen Ideen“ der Finanzmathematik. Dort findet man folgendes Zitat eines Probanden:

> „Im Casino ist vielleicht intellektuell viel einfacher nachzuvollziehen, dass es da keine Gesetzmäßigkeiten gibt. Im Aktienmarkt da kannst eben sehr wohl suggerieren, dass es da Gesetzmäßigkeiten gibt und es wird ständig suggeriert. ..., wenn ein Analyst sagt, dass demnächst diese Aktie steigen wird, das ist ja immer eine blanke Lüge, ja, du weißt genau, dass ein Analyst nichts über das zukünftige Verhalten voraussagen kann. Trotzdem wird suggeriert, dass Leute, die sich mit Wirtschaft besser auskennen und eine Nase haben, eine gewisse Intuition haben, was auch immer,...“ (ebd., S. 322)

Das unterstreicht auch Kahnemann (2012) im Kapitel „The Illusion of Stock-Picking Skill“ seines berühmten Buches „Thinking, Fast and Slow“. Auch andere Autoren/innen betonen die Unmöglichkeit einer sicheren Prognose von Aktienkursen.

> „ ..., dass man natürlicher Weise davon ausgeht, dass Aktienkurse durch wirtschaftliche, gesellschaftliche und politische Entwicklungen und menschliche

Entscheidungen bestimmt werden und insofern determiniert sind. Dieses Wirkungsgefüge ist jedoch derart komplex, so dass wir über zu wenige Kenntnisse für eine sichere Prognose verfügen. Damit ist die Entwicklung von Aktienkursen in Anlehnung an HENZE 2000 als nicht deterministisch anzusehen: ...“ (Daume (2009), S. 100 f.)

Demnach eignet sich ein Zugang über für Schüler/-innen bereits bekannte Würfelglücksspiele. Die Assoziation von Finanzmarkt und Glücksspiel soll bewusst in den Köpfen der Schüler/innen geschaffen werden, um keine Illusionen zu erzeugen.

Die Verwendung von Würfeln, es wären ja auch andere Zufallsgeneratoren möglich, in den Spielbeschreibungen basiert auf dem handlungsorientierten, datenorientierten Ansatz. Schüler/innen erkunden unterschiedliche Aufteilungsstrategien auf die beiden Würfel, indem sie die Würfel öfters werfen, die Ausfälle aufzeichnen und die jeweilige Auszahlung berechnen. Das kann im Unterricht mit der Methode der Gruppenexploration realisiert werden, z.B. stehen für die Gruppen die Strategien 100/0 (100% des Einsatzes auf den roten Würfel und 0% des Einsatzes auf den blauen Würfel), 90/10, 80/20, 70/30, 60/40, 50/50, 40/60, ...0/100 zur Auswahl. Bei 60 Würfen pro Gruppe wurden bei einer schulpraktischen Erprobung gute Ergebnisse erzielt (vgl. Dorner (2017), S. 193 ff. bzw. 285 ff.). Aus den Daten lässt sich der Mittelwert und die empirische Standardabweichung des Gewinns ermitteln. Ausgehend von den Daten können theoretische Überlegungen zu den Glücksspielen angestellt werden. Die Kennzahlen der Aktien können in einer ersten Annäherung aus historischen Daten geschätzt werden, auch wenn das eigentlich konträr zum Glücksspielansatz ist. Die Lehrperson muss dann zumindest die geringe Aussagekraft der historischen Daten für die Zukunft thematisieren. Die Assoziierung zum Unvorhersehbaren, zum Glücksspiel bleibt erhalten.

Bei der Verwendung der Baumdiagramme aus den Abschnitten 2, 3 und 4 im Unterricht muss gegebenenfalls die Darstellung erläutert werden. Es könnte für die Lernenden auf den ersten Blick ungewöhnlich erscheinen, dass bei der Ermittlung des Gewinns entlang eines Pfades addiert wird. Eine nochmalige Thematisierung der Pfadregeln bietet sich hierbei an.

Stofflich gesehen liefert dieser Unterrichtsvorschlag einen Beitrag zu zwei der fünf „zentralen Ideen“ der Finanzmathematik nach Dorner (2017). Das Prinzip „Setze nicht alles auf eine Karte!“ bzw. „Diversifikation“ fällt unter die zentrale Idee „Handhabung von Risiko“. Das Verwenden von stochastischen Methoden, wie die Minimierung der Varianz bzw. Standardabweichung, ordnet man der Idee „Verwenden von Stochastik im Kontext Finanzmathematik“ unter (vgl. ebd., S. 99 f.).

Zurück zur Ausgangsfrage: Wer sein Geld in mehrere Aktien anlegt, z.B. in einen Aktienfond, der minimiert in der Regel das Risiko im Vergleich zur Investition in nur eine Aktie. Dieses Prinzip der Diversifikation gehört zum Basisfinanzwissen und lässt sich bereits mit zwei Aktien bzw. Würfeln aufzeigen. Eine gute mathematische Grundbildung ist von größter Bedeutung für einen weitblickenden Umgang mit Geld.

Literatur

Adelmeyer, M. und Warmuth, E. (2009): Finanzmathematik für Einsteiger. Vieweg+Teubner: Wiesbaden.

Daume, P. (2009): Finanzmathematik im Unterricht. Vieweg+Teubner: Wiesbaden.

Dorner, C. (2017): Schulrelevante Aspekte der Finanzmathematik. Dissertation an der Universität Wien.

Henze, N. (2000): Stochastik für Einsteiger. Vieweg-Verlag, 2. Auflage: Wiesbaden.

Kahneman, D. (2012): Thinking, Fast and Slow. Penguin Books: London.

Lusardi, A. und Mitchell, O. (2014): The Economic Importance of Financial Literacy: Theory of Evidence. In: Journal of Economic Literature, 52(1), S. 5–44.

Markowitz, M. (1952): Portfolio Selection. In: The Journal of Finance, Vol. 7(1), S. 77–91.

Markowitz, M. (1999): The Early History of Portfolio Theory: 1600–1960. In: Financial Analyst Journal, 55(4), S. 5–16.

Anschrift des Verfassers
Christian Dorner
Institut für Mathematik und wissenschaftliches Rechnen
Karl-Franzens-Universität Graz
Heinrichstraße 36
A-8010 Graz
christian.dorner@uni-graz.at